نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **بیضی**

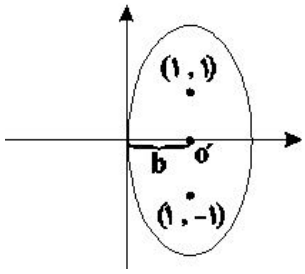
@sabertarkibi

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۲

$$F(1,1),\ F'(1,-1) \quad \Rightarrow \quad FF' = 2c = 2 \ \Rightarrow \ c = 1$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{1}{a}$$



شکل را نگاه کنید. بیضی در صورتی بر محور yها مماس می‌شود که $b = 1$ باشد. می‌دانیم:

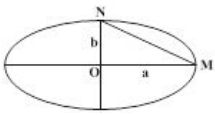
$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{b=c=1} a^2 = 1 + 1 = 2 \ \Rightarrow \ a = \sqrt{2}$$

بنابراین $e = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۴

دورترین و نزدیک‌ترین نقطه‌ی بیضی نسبت به مرکز آن، به‌ترتیب رأس‌های کانونی و ناکانونی بیضی هستند. بنابراین اگر O مرکز بیضی باشد، $OM = a$ و $ON = b$ و در نتیجه $MN = \sqrt{a^2 + b^2}$ می‌باشد. داریم:



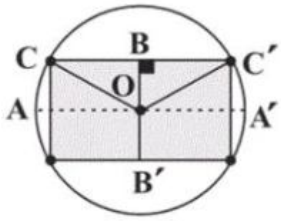
$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{7} + \frac{y^2}{2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 7 \\ b^2 = 2 \end{cases} \quad 2x^2 + 7y^2 - 4x = 12 \Rightarrow 2(x^2 - 2x + 1) + 7y^2 = 12 + 2 \Rightarrow 2(x-1)^2 + 7y^2 = 14$$

$$MN = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7 + 2} = 3$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»



$AA' = 2a$ قطر دایره است، پس شعاع دایره برابر است با $a = \frac{AA'}{2}$، بنابراین $OC = a$ و طول OB برابر نصف طول قطر کوچک بیضی است، یعنی $OB = b$.

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه OBC داریم:

$$OC^2 = OB^2 + BC^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + BC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = \underbrace{a^2 - b^2}_{c^2} \Rightarrow BC = c$$

پس مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = BB' \times CC' \Rightarrow S = (2b)(2c) = 4bc \quad (*)$$

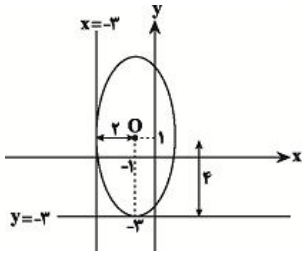
طبق فرض: $\begin{cases} 2a = \sqrt{5} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 2c = 2 \Rightarrow c = 1 \end{cases} \Rightarrow b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{1}{2}$

$$\xrightarrow{(*)} S = 4(\tfrac{1}{2})(1) = 2$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۲

مطابق شکل زیر، داریم:



$$\begin{cases} a = ۴ \\ b = ۲ \end{cases}$$

از آن‌جا که بیضی قائم است و مرکز آن $O(-۱,۱)$ است. معادلهٔ بیضی برابر است با:

$$\frac{(x+۱)^۲}{۴} + \frac{(y-۱)^۲}{۱۶} = ۱$$

برای یافتن نقطهٔ تلاقی بیضی با محور yها، $x = ۰$ را قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱}{۴} + \frac{(y-۱)^۲}{۱۶} = ۱ \Rightarrow \frac{(y-۱)^۲}{۱۶} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow (y-۱)^۲ = ۱۲$$

$$\Rightarrow y - ۱ = \pm ۲\sqrt{۳} \Rightarrow y = ۱ \pm ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \text{عرض مثبت} = ۱ + ۲\sqrt{۳}$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این‌که مرکز بیضی، دقیقاً وسط دو کانون آن قرار دارد، پس در صورتی‌که F' کانون دیگر بیضی باشد، داریم:

$$x_O = \frac{x_F + x_{F'}}{۲} \Rightarrow ۱ = \frac{۵ + x_{F'}}{۲} \Rightarrow x_{F'} = -۳$$

$$y_O = \frac{y_F + y_{F'}}{۲} \Rightarrow ۲ = \frac{۲ + y_{F'}}{۲} \Rightarrow y_{F'} = ۲$$

از طرفی $MF + MF' = ۲a$، پس داریم:

$$MF = \sqrt{(۵-۴)^۲ + (۲-۳)^۲} = \sqrt{۲}$$

$$MF' = \sqrt{(-۳-۴)^۲ + (۲-۳)^۲} = ۵\sqrt{۲}$$

بنابراین $۲a = ۶\sqrt{۲}$ و در نتیجه $a = ۳\sqrt{۲}$. از طرفی $OF = c$، پس $c = ۴$ و خروج از مرکز بیضی برابر است با:

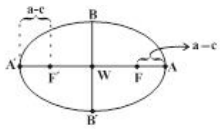
$$e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۳\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به تعریف بیضی، مکان هندسی نقطه‌ی P، تمام نقاط روی محیط یک بیضی با کانون‌های $(-۳, ۰)$ و $(۴, ۰)$ و مقدار ثابت $۲a=۹$ است.

مطابق شکل، از بین نقاط روی بیضی، کم‌ترین فاصله تا کانون‌های بیضی برابر $AF=a-c$ است.



در این بیضی داریم:

مقدار ثابت: $۲a = ۹ \Rightarrow a = \frac{۹}{۲}$

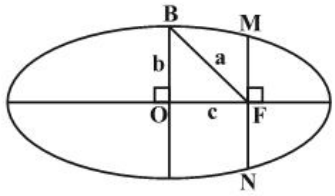
فاصله‌ی کانونی: $۲c = |۴ - (-۳)| = ۷ \Rightarrow c = \frac{۷}{۲}$

پس کم‌ترین فاصله‌ی P از نقطه‌ی M برابر است با: $a - c = \frac{۹}{۲} - \frac{۷}{۲} = ۱$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنیم بیضی افقی باشد، حال با توجه به شکل:



$a = ۸ , e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{c}{۸} \Rightarrow c = ۲$

و داریم: $a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۶۴ = b^۲ + ۴ \Rightarrow b^۲ = ۶۰$

طول وتر کانونی $= |MN| = \frac{۲b^۲}{a} = \frac{۲\times۶۰}{۸} = ۱۵$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۴

گزینهٔ «۴»

مجموع فواصل هر نقطهٔ روی بیضی از دو کانون برابر با طول قطر بزرگ بیضی یعنی ۲a است. طبق اطلاعات مسأله، خروج از مرکز برابر با $\frac{۱}{۲}$ است:

$$e = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۱}{۲} \rightarrow c = \frac{a}{۲}$$

همچنین قطر کوچک ۲b = ۱۲ است، پس b = ۶. بنابراین:

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{c=\frac{a}{۲}} a^۲ = ۳۶ + \left(\frac{a}{۲}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۳a^۲}{۴} = ۳۶ \Rightarrow a^۲ = ۴۸$$

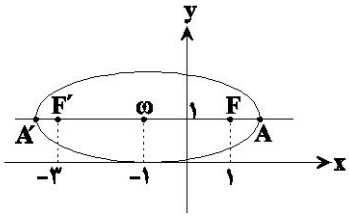
$$\xrightarrow{a>۰} a = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow ۲a = ۸\sqrt{۳}$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا شکل این بیضی را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم، داریم:



$$FF' = ۲c = |x_F - x_{F'}| \Rightarrow c = ۲$$

$$y_\omega = y_F = ۱, b = |y_\omega| = ۱$$

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow AA' = ۲a = ۲\sqrt{۱+۴} = ۲\sqrt{۵}$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

اگر قطر بزرگ بیضی را با ۲a و قطر کوچک آن را با ۲b نشان دهیم، داریم:

$$۲a = ۳ \times ۲b \Rightarrow a = ۳b \Rightarrow a^۲ = ۹b^۲$$

با توجه به آن‌که در بیضی رابطه $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است، پس:

$$\Rightarrow a^۲ = ۹(a^۲ - c^۲) \Rightarrow ۸a^۲ = ۹c^۲$$

خروج از مرکز بیضی به‌صورت $e = \frac{c}{a}$ تعریف می‌شود:

$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{۸}{۹}} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$